ESSAI ANALYTIQUE

SUR L'INTÉGRATION DE DEUX FORMULES DIFFÉRENTIELLES, ET SUR LA SOMME GÉNÉRALE DES SÉRIES HARMONIQUES A TERMES RATIONNELS.

PAR M. JEAN FRANÇOIS MALFATTI

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUE A L'UNIVERSITÉ DE FERRARE
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ITALIENNE DE VERONE
ET CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DE TURIN

ESSAI ANALYTIQUE

SUR L'INTÉGRATION DE DEUX FORMULES DIFFÉRENTIELLES, ET SUR LA SOMME GÉNÉRALE DES SÉRIES HARMONIQUES A TERMES RATIONNELS.

PAR M. MALFATTI

ARTICLE I.

PROBLÈME ANALYTIQUE I.

Intégrer la formule (A) .... $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$, *dans laquelle* m, n *sont des nombres entiers & rationnels.*

I. Je fais $z = y^m$, d'où naissent les déterminations suivantes ; $dz = my^{m-1}dy$; $z^{\frac{n}{m}} = y^n$. De-là $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{my^{m+n-1}dy}{1+y^m} = my^{n-1}dy - \frac{my^{n-1}dy}{1+y^m}$. Si m, n sont tous deux positifs ou négatifs, on a toujours (A) $= \frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$. Si l'un des deux est négatif, l'on aura dans les deux cas (A) $= \frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z}$.

Intégrer la formule $\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z}$.

2. En mettant dans les substitutions précédentes $-n$ à la place de n, l'on a

$$\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{my^{m-n-1}dy}{1+y^m} = mdy \cdot \frac{y^{m-n-1}}{1+y^m}.$$

Or ou $m > n$, ou $m < n$. Si $m > n$, le numérateur de la fraction $\frac{y^{m-n-1}}{1+y^m}$ a l'exposant positif, si $m < n$, cet exposant devient négatif.

Première hypothèse $m < n$

3. L'on fait dans cette hypothèse $\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{mdy}{y^{n+1-m}(1+y^m)}$.

Je suppose la formule $\frac{1}{y^{n+1-m}(1+y^m)} = \frac{A}{y^{n+1-m}} + \frac{By^{2m-n-1}}{1+y^m}$, où A, B sont des constantes à déterminer. En réduisant le second membre, j'ai $\frac{1}{y^{n+1-m}(1+y^m)} = \frac{A+(A+B)y^m}{y^{n+1-m}(1+y^m)}$; donc, par l'identité, $A = 1$, $A + B = 0$, ou $B = -1$;

& par conséquent $\frac{1}{y^{n+1-m}(1+y^m)} = \frac{1}{y^{n+1-m}} - \frac{y^{2m-n-1}}{1+y^m}$.

Si tandis que $m < n$, $2m > n$, nous serons parvenus à n'avoir plus de fonctions de y, qui multiplient $1+y^m$. Mais si $2m < n$, il faudra encore décomposer la formule

$$\frac{y^{2m-n-1}}{1+y^m} = \frac{1}{y^{n+1-2m}(1+y^m)}.$$

4. Pour cela je fais $\frac{1}{y^{n+1-2m}(1+y^m)} = \frac{A}{y^{n+1-2m}} + \frac{By^{3m-n-1}}{1+y^m}$

qui étant réduite à $\frac{1}{y^{n+1-2m}(1+y^m)} = \frac{A+(A+B)y^m}{y^{n+1-2m}(1+y^m)}$, la condition de l'identité nous présente encore

$A = 1$, $B = -1$, qui rend $\frac{y^{2m-n-1}}{1+y^m} = \frac{1}{y^{n+1-2m}} - \frac{y^{3m-n-1}}{1+y^m}$

& par la substitution dans la première formule il résulte

$$\frac{1}{y^{n+1-m}(1+y^m)} = \frac{1}{y^{n+1-m}} - \frac{1}{y^{n+1-2m}} + \frac{y^{3m-n-1}}{1+y^m}.$$

Si l'on a encore $3m < n$, par le même raisonnement & les mêmes substitutions l'on trouvera

$$\frac{1}{y^{n+1-m}(1+y^m)} = \frac{1}{y^{n+1-m}} - \frac{1}{y^{n+1-2m}} + \frac{1}{y^{n+1-3m}} - \frac{1}{y^{n+1-4m}} \cdots$$

$$\pm \frac{1}{y^{n+1-qm}} \mp \frac{y^{(q+1)m-n-1}}{1+y^m}$$, c'est à dire qu'on poursuivra la série jusqu'à ce dernier résidu, où l'exposant de y dans le numérateur dévient une quantité positive, ce qui a lieu quand le multiple $q+1$ de m rend $(q+1)m > n+1$, terme auquel on doit toujours parvenir.

5. Cela fait & revenant à la valeur de (A), l'on aura

$$(A) \ldots \frac{\zeta^{-\frac{n}{m}} d\zeta}{1+\zeta} = \frac{mdy}{y^{n+1-m}} - \frac{mdy}{y^{n+1-2m}} + \frac{mdy}{y^{n+1-3m}} - \frac{mdy}{y^{n+1-4m}} \cdots$$

$$\pm \frac{mdy}{y^{n+1-qm}} \mp \frac{my^{(q+1)m-n-1}dy}{1+y^m}.$$

Il est clair, que la série des termes qui ont des dénominateurs monomes, est d'abord intégrée, le seul terme de difficile intégration est la dernière formule $\frac{y^{(q+1)m-n-1}dy}{1+y^m}$.

Je fais $(q+1)m - n = m - N$, & elle devient $\frac{my^{m-N-1}dy}{1+y^m}$, la même que ci-après pour l'hypothèse de $m > n$ en changeant N en n. Voyons donc ce qu'il arrive dans l'hypothèse de $m > n$.

Seconde hypothèse $m > n$.

6. Cette supposition de $m > n$ rend (A) ... $\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{my^{m-n-1}dy}{1+y^m}$, où $m-n-1$ est une quantité positive. Mais si l'on fait attention qu'en changeant le signe de la quantité n, il résulte $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{my^{m+n-1}dy}{1+y^m}$, & que la différence de valeur dans les exposans tous deux positifs $m+n-1$, $m-n-1$ de y, ne peut altérer la méthode qu'on doit garder, à cause que cette dernière fraction conserve toujours la même forme, & l'autre la conserve dans l'hypothèse de $m > n$; on s'apercevra facilement qu'il suffit d'avoir intégré la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$ pour que $\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z}$ en changeant n en $-n$ soit aussi intégrée, dans le cas que $m > n$, & même pour qu'en changeant n en $-N$ l'on ait l'intégration de la même formule $\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z}$, dans l'hypothèse de $m < n$, toute la difficulté d'intégrer celle-ci consistant dans le dernier terme $\mp \frac{y^{m-N-1}dy}{1+y^m}$ de sa transformée. C'est pourquoi sans m'étendre davantage sur la formule $\frac{z^{-\frac{n}{m}}dz}{1+z}$ je vais m'attacher uniquement à l'autre $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$, puisque c'est de la méthode d'intégrer cette dernière que dépend l'intégration de la première.

Intégrer la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$.

7. Puisque $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{my^{m+n-1}dy}{1+y^m}$ (n.° 1), les deux hypothèses de $n > m$, & de $n < m$ se présentent d'abord à l'esprit.

Première hypothèse $n > m$.

Qu'on développe en série la fraction $\frac{my^{m+n-1}dy}{1+y^m}$ jusqu'au terme $q+1$, en prenant q tel que $qm+1$ devienne un nombre moindre que n le plus proche possible, & en ajoutant ensuite le reste on aura

$$\frac{my^{m+n-1}dy}{1+y^m} = my^{n-1}dy - my^{n-m-1}dy + my^{n-2m-1}dy$$

$$- my^{n-3m-1}dy \ldots\ldots \pm my^{n-mqm-1}dy \mp \frac{my^{n-qm-1}dy}{1+y^m}.$$

La série des termes entiers est d'abord intégrable, comme l'on sait ; le terme de pénible intégration est le dernier $\mp \frac{my^{n-qm-1}dy}{1+y^m}$ qui, en faisant $n - qm = N$, se change en $\mp \frac{my^{N-1}dy}{1+y^m}$; & nous remarquerons ici que $n - qm$ est nécessairement $< m$, parce que de n j'ai retranché avec qm tout le multiple de m qu'il m'a été possible ; donc N & l'exposant $N - 1$ de cette dernière formule sera $< m$.

8. Mais si $n < m$, puisque, comme nous avons remarqué, $\frac{my^{m+n-1}dy}{1+y^m} = my^{n-1}dy - \frac{my^{n-1}dy}{1+y^m}$, en intégrant l'on aura

$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z} = \frac{my^n}{n} - \int \frac{my^{n-1} dy}{1+y^m}$ + const. Dans la formule affectée du signe $\int$, l'exposant $n-1$ de y est plus petit que m. Mais dans la formule $\frac{my^{N-1}dy}{1+y^m}$ du n.° 7 nous avons aussi vu que $N-1 < m$; la même méthode réglera donc l'intégration des deux formules ; & $\frac{my^{n-1}dy}{1+y^m}$ étant intégrée, on aura, en changeant n en N, l'intégration de $\frac{my^{N-1}dy}{1+y^m}$. Les intégrations de la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z}$ dans toutes les hypothèses, & dans les deux cas pour chacune, de $n > m$ & de $n < m$, dépendent donc de l'intégration de la formule $\frac{my^{n-1}dy}{1+y^m}$ dans la seule hypothèse de $n < m$; ce qui fera l'objet de nos recherches actuelles. Il s'agit donc d'

Intégrer la formule $\frac{my^{n-1}dy}{1+y^m}$ *dans l'hypothèse de* $n < m$.

9. Pour l'intégration de cette formule je remarque avant tout que comm'elle consiste presqu'entièrement dans la résolution du dénominateur $1+y^m$ en facteurs binomes & trinomes, & dans la recherche des numérateurs pour la décomposition de la formule en autant de fractions qui aient ces facteurs pour dénominateurs, il faudra premièrement voir combien de facteurs binomes & trinomes y ont lieu. A tel effet on doit distinguer les deux cas de m pair & de m impair.

Si m est pair, l'on conçoit clairement que la formule $1 + y^m$ n'a aucun diviseur linéaire & que par conséquent les facteurs trinomes seront au nombre de $\frac{m}{2}$. Si m est impair, $1 + y^m$ étant toujours divisible par $1 + y$, on aura dans $1 + y^m$ ce facteur binome, & un nombre $\frac{m-1}{2}$ de facteurs trinomes ; il est aussi connu par la théorie d'Euler, que les racines de l'équation $y^m + 1 = 0$, étant toutes imaginaires dans le cas de m pair, & n'y en ayant qu'une réelle dans le cas de m impair, tous ces trinomes doivent être représentés par la formule générale

$1 - 2y \cos. \frac{r\pi}{2m} + y^2$, où π est la circonférence du rayon 1, r tous les nombres impairs successivement depuis 1 jusqu'au nombre immédiatement plus petit que m; nous ajouterons en dernier lieu que la forme de la fraction binome est $\frac{H}{1+y}$, & celle de la fraction trinome générale $\frac{A + By}{1 - 2y \cos. \frac{r\pi}{2m} + y^2}$, & que la première difficulté se réduit à trouver les valeurs de H, A, B dont celles qui appartiennent à A, B varieront selon les différentes valeurs de r; examinons maintenant le

Premier cas de m pair.

10. Ce cas n'admettant aucune fraction de dénominateur binome, nous aurons, en faisant pour à présent abstraction du facteur différentiel dy,

$$\frac{my^{n-1}}{1+y^m} = \frac{A+By}{1-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+y^2} + \frac{A'+B'y}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \frac{A''+B''y}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{A'''+B'''y}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}.$$

Je fais pour abrégér $\frac{r\pi}{2m} = \varphi$, & j'ai $1 - 2y\cos.\frac{r\pi}{2m} + y^2 = 1 - 2y\cos.\varphi + y^2$. Je suppose

$$\frac{my^{n-1}}{1+y^m} = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(1-2y\cos\varphi+y^2)S} = \frac{A+By}{1-2y\cos\varphi+y^2} + \frac{R}{S},$$

où P, R, S, Q sont nécessairement des fonctions rationnelles & entières de y, S le produit des facteurs restans de $1 - 2y\cos.\varphi + y^2$, en sorte que $R = \frac{P-S(A+By)}{1-2y\cos.\varphi+y^2}$; & puisque R est fonction rationnelle entière, P—S(A+By) sera exactement divisible par son dénominateur. Si nous faisons donc ce dénominateur égal à zéro, P—S(A+By) deviendra aussi zéro ; mais en rendant le dénominateur = à zéro, il en résulte l'équation $1 - 2y\cos.\varphi + y^2 = 0$, qui donne $y = \cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1}$; & par les règles trigonométriques $y^2 = \cos.2\varphi \pm \sin.2\varphi\sqrt{-1}$;

$y^3 = \cos.3\varphi \pm \sin.3\varphi\sqrt{-1}$, ou généralement $y^t = \cos.t\varphi \pm \sin.t\varphi\sqrt{-1}$. Donc, dans l'expression P — S (A + By) en substituant à y, & à ses puissances ces valeurs, P — S (A + By) deviendra = o. Je nomme $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\gamma \pm \delta\sqrt{-1}$, ce que deviennent P, S, moyen-

nant les substitutions des valeurs de y, & puisque $P = S(A + By)$, l'on aura, eu égard aux deux signes,

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = (\gamma + \delta\sqrt{-1})(A + B\cos.\phi + B\sin.\phi\sqrt{-1})$$
$$\alpha - \beta\sqrt{-1} = (\gamma - \delta\sqrt{-1})(A + B\cos.\phi - B\sin.\phi\sqrt{-1})$$

J'ajoute ces deux équations, ensuite je retranche la seconde de la première, & il me vient, après les réductions;

$$\alpha = \gamma A + \gamma B\cos.\varphi - \delta B\sin.\varphi;$$
$$\beta = \delta A + \delta B\cos.\varphi + \gamma B\sin.\varphi.$$

enfin par la méthode connue des éliminations, il résultera

$$A = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\delta^2 + \gamma^2} + \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}\cdot\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2}; \quad B = \frac{-1}{\sin.\varphi}\cdot\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2}$$

11. Ayant fait (N.° préc.) $S = \frac{Q}{1 - 2y\cos.\phi + y^2}$, si dans ce second membre je substitue à y sa valeur $\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1}$, par l'évanouissement nécessaire du numérateur & du dénominateur, l'on aura $S = \frac{0}{0}$. Je mets à la place de ces deux zéros les deux infiniment petits du, dy pour avoir $S = \frac{du}{dy} = \frac{Q}{1 - 2y\cos.\varphi + y^2}$, & j'obtiens l'équation $du - 2ydu\cos.\varphi + y^2du = Qdy$. Maintenant je différencie, en supposant ces deux différentielles constantes, comme elles le doivent être, puisqu'étant zéro, elles n'ont aucune différence; & il résulte $-2dydu\cos.\varphi + 2ydydu = dQdy$, qui me donne $\frac{du}{dy} = S = \frac{dQ}{2dy(y - \cos.\varphi)}$. En appelant donc $E \pm F\sqrt{-1}$, ce que devient $\frac{dQ}{dy}$ par la substitution en dQ de la valeur ordinaire de y après la différenciation; à cause que l'on a $y - \cos.\varphi = \pm\sin.\varphi\sqrt{-1}$ nous aurons $S = \frac{E \pm F\sqrt{-1}}{\pm 2\sin.\varphi\sqrt{-1}}$. Si nous nous rappelons que pour la même hypothèse nous avons fait

$S = \gamma \pm \delta\sqrt{-1}$, il se présentera d'abord les deux équations

$2\gamma \sin.\varphi\sqrt{-1} - 2\delta \sin.\varphi = E + F\sqrt{-1}$

$-2\gamma \sin.\varphi\sqrt{-1} - 2\delta \sin.\varphi = E - F\sqrt{-1}$, d'où l'on tire facilement $\delta = \frac{-E}{2\sin.\varphi}$; $\gamma = \frac{F}{2\sin.\varphi}$. Nous substituerons enfin ces valeurs à celles de A, & B (n.° 10) & il en résultera ces nouvelles formules

$$A = \frac{-2\sin.\varphi(\beta E - \alpha F) - 2\cos.\varphi(\alpha E + \beta F)}{E^2 + F^2}; \quad B = \frac{2(\alpha E + \beta F)}{E^2 + F^2}$$

12. Pour notre cas nous avons

$P = my^{n-1} = m(\cos.(n-1)\varphi \pm \sin.(n-1)\varphi\sqrt{-1})$: donc $\alpha = m\cos.(n-1)\varphi$, $\beta = m\sin.(n-1)\varphi$. De plus $Q = 1 + y^m$, &

$\frac{dQ}{dy} = my^{m-1} = m\cos.(m-1)\varphi \pm m\sqrt{-1}.\sin.(m-1)\varphi$.

De-là $E = m\cos.(m-1)\varphi$, $F = m\sin.(m-1)\varphi$,

& par conséquent

$\beta E - \alpha F = m^2(\sin.(n-1)\varphi\cos.(m-1)\varphi - \sin.(m-1)\varphi\cos.(n-1)\varphi)$

$= -m^2\sin.(m-n)\varphi$;

$\alpha E + \beta F = m^2(\cos.(m-1)\varphi\cos.(n-1)\varphi$

$+ \sin.(m-1)\varphi\sin.(n-1)\varphi) = m^2\cos.(m-n)\varphi$; $E^2 + F^2 = m^2$;

l'on aura donc $A = \frac{2m^2\sin\varphi\sin(m-1)\varphi - 2m^2\cos.\varphi\cos.(m-n)\varphi}{m^2}$

ou bien $A = -\cos.(m-n+1)\varphi$; $B = 2\cos.(m-n)\varphi$; & la fraction générale du trinome

$$\frac{A + By}{1 - 2y\cos.\varphi + y^2} = \frac{-2\cos.(m-n+1)\varphi + 2y\cos.(m-1)\varphi}{1 - 2y\cos.\varphi + y^2}$$

$$= \frac{-2\cos.(m-n+1)\frac{r\pi}{2m} + 2y\cos.(m-n)\frac{r\pi}{2m}}{1 - 2y\cos.\frac{r\pi}{2m} + y^2}$$

C'est pourquoi en donnant successivement à r les valeurs $1, 3, 5, \ldots m-1$, & reprenant l'équation

$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = my^{n-1}dy - \frac{my^{n-1}dy}{1+y^m}$, par la décomposition qu'on a trouvée du dernier terme du second nombre, l'on fera, m étant pair

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = my^{n-1}dy + \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{3\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{3\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{5\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{5\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{2\cos.(m-n+1)(m-1)\frac{\pi}{2m}dy - 2\cos.(m-n)(m-1)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

Second Cas : m impair.

13. Si m est impair, l'expression des termes trinomes est la même que la précédente avec la seule différence qu'au lieu que dans celle-là r en prenant les valeurs 1, 3, 5, &c. arrive successivement jusqu'à $m-1$, dans celle-ci r doit arriver jusqu'à $m-2$, comme il est évident; mais dans ce cas de m impair, nous avons vu qu'il y entre encore le terme du dénominateur binome $\frac{H}{1+y}$, que l'on multiplie par dy. Il faut donc déterminer le symbole H, ce que nous ferons de la manière suivante. Faisant pour plus grande généralité $\frac{my^{n-1}}{(f+gy)S} = \frac{my^{n-1}}{1+y^m} = \frac{P}{Q}$, l'on peut aussi faire $\frac{P}{Q} = \frac{H}{f+gy} + \frac{R}{S}$,

où S est le produit de tous les trinomes, & vaut l'équation $Q = (f + gy)S$. Donc

$\frac{P}{(f+gy)S} = \frac{H}{f+gy} + \frac{R}{S}$, d'où l'on tire $R = \frac{P - HS}{f+gy}$, & puisque R est une formule entière, $P - HS$ sera exactement divisible par $f + gy$; c'est pourquoi, si nous supposons $f + gy = 0$, ou $y = -\frac{f}{g}$, cette valeur étant substituée en $P - HS$, nous aurons $P - HS = 0$, c'est-à-dire $H = \frac{P}{S} = \frac{P(f+gy)}{Q}$, si dans la formule $\frac{P(f+gy)}{Q}$, nous mettons $y = -\frac{f}{g}$; mais Q contenant $f + gy$, la fraction susdite devient $= \frac{0}{0}$. Il faut donc avoir recours au calcul différentiel pour avoir la valeur de $\frac{P(f+gy)}{Q}$. Je fais $H = \frac{0}{0} = \frac{du}{dy}$, qui rend $\frac{du}{dy} = \frac{P(f+gy)}{Q}$, ou bien $Q du = P dy\,(f+gy)$: & en différenciant dans la supposition de du, dy constantes;

$dQ du = dP dy\,(f+gy) + g P dy^2$.

De-là $\frac{du}{dy} = \frac{0}{0} = H = \frac{dP(f+gy) + gP dy}{dQ}$, ou, puisque $f + gy = 0$ $H = \frac{gP dy}{dQ}$, lorsque dans P, & dans dQ, après avoir différencié Q, l'on aura fait $y = -\frac{g}{f}$. Or nous avons $P = my^{n-1}$, $Q = 1 + y^m$, & parce que $f + gy = 1 + y$, $f = 1$, $g = 1$, $\frac{dQ}{dy} = my^{m-1}$. On a donc moyennant les substitutions $H = \frac{y^{n-1}}{y^{m-1}} = y^{n-m} = (-1)^{n-m} = \frac{(-1)^n}{(-1)^m}$; & m étant impair, $H = -(-1)^n$, & la fraction binome

$$\frac{H}{1+y} = -\frac{(-1)^n}{1+y}.$$

14. Je joins ici les deux séries qui représentent la valeur de $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$ dans les deux différens cas de m pair, & de m impair, & ce sont

m pair.

$$1.^{re}\ \frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = my^{n-1}dy + \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{\pi}{2m}dy - 2\cos.(m-n)\frac{\pi}{m}ydy}{1-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{3\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{3\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{5\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{5\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)(m-1)\frac{\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)(m-1)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

m impair.

$$2.^{de}\ \frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = my^{n-1}dy + \frac{(-1)^n dy}{1+y}$$

$$+\frac{2\cos(m-n+1)\frac{\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{3\pi}{2m}dy - 2\cos.(m-n)\frac{3\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{5\pi}{2m}.dy-2\cos.(m-n)\frac{5\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)(m-2)\frac{\pi}{2m}dy-2\cos.(m-n)(m-2)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

15. Mais on peut rendre ces expressions encore plus simples en réfléchissant qu'en général

$\cos.(m-n+1)\frac{r\pi}{2m}=\cos.\frac{r\pi}{2}-(n-1)\frac{r\pi}{2m}$

$=\cos.\frac{r\pi}{2}\cos.(n-1)\frac{r\pi}{2m}+\sin.\frac{r\pi}{2}\sin.(n-1)\frac{r\pi}{2m}$

$=-\cos.(n-1)\frac{r\pi}{2m}$, parce que r devant être nombre impair, on aura pour toute valeur de r, $\cos.\frac{r\pi}{2}=-1$, $\sin.\frac{r\pi}{2}=0$. Nous prouverons de la même manière que $\cos.(m-n)\frac{r\pi}{2m}=-\cos.\frac{rn\pi}{2m}$; & ces substitutions feront changer les équations 1e & 2e dans les suivantes.

m pair.

$$3.^{\text{me}}\ \frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}=my^{n-1}dy-\frac{2\cos.(n-1)\frac{\pi}{2m}.dy+2\cos.\frac{n\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\frac{2\cos.(n-1)\frac{3\pi}{2m}dy+2\cos.\frac{3n\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}.dy^2}-\frac{2\cos.(n-1)\frac{5\pi}{2m}.dy+2\cos.\frac{5n\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2}-$$

$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$-\frac{2\cos.(n-1)(m-1)\frac{\pi}{2m}.dy+2\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

m impair.

$$4.^{me}\quad \frac{z^{\frac{n}{m}}\,dy}{1+z} = my^{n-1}dy + \frac{(-1)^n\,dy}{1+y}$$

$$- \frac{2\cos.(n-1)\frac{\pi}{2m}\,.\,dy + 2\cos.\frac{n\pi}{2m}\,.\,ydy}{1 - 2y\cos.\frac{\pi}{2m} + y^2}$$

$$- \frac{2\cos.(n-1)\frac{3\pi}{2m}\,.\,dy + 2\cos.\frac{3n\pi}{2m}\,.\,ydy}{1 - 2y\cos.\frac{3\pi}{2m} + y^2} - \frac{2\cos.(n-1)\frac{5\pi}{2m}\,.\,dy + 2\cos.\frac{5n\pi}{2m}\,ydy}{1 - 2y\cos.\frac{5\pi}{2m} + y^2}$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$- \frac{2\cos.(n-1)(m-2)\frac{\pi}{2m}\,dy + 2\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\,.\,ydy}{1 - 2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m} + y^2}\,.$$

16. Maintenant il nous reste à préparer les formules pour l'intégration, ce que nous ferons en remarquant que $\cos.(n-1)\frac{r\pi}{2m} = \cos.\left(\frac{nr\pi}{2m} - \frac{r\pi}{2m}\right) = \cos.\frac{nr\pi}{2m}\,.\cos.\frac{r\pi}{2m} + \sin.\frac{nr\pi}{2m}\ \sin.\frac{r\pi}{2m}$. En mettant donc successivement $1, 3, 5 \ldots \left[\frac{m-1}{m-2}\right.$ à la place de r, & en substituant les valeurs qui résultent dans les équations 3e, 4e, & en les disposant convenablement nous obtiendrons

m pair.

$$5.^{me}\quad \frac{z^{\frac{n}{m}}\,dz}{1+z} = my^{n-1}dy + \cos.\frac{n\pi}{2m}\,.\,\frac{2ydy - 2\cos.\frac{\pi}{2m}\,.\,dy}{y^2 - 2y\cos.\frac{\pi}{2m} + 1} - \frac{2\sin.\frac{n\pi}{2m}\sin.\frac{\pi}{2m}\,.\,dy}{1 - 2y\cos.\frac{\pi}{2m} + y^2}\,.$$

$$+\cos.\frac{3n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{3\pi}{2m}.dy}{y^2-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.\frac{3n\pi}{2m}\sin.\frac{3\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\cos.\frac{5n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{5\pi}{2m}.dy}{y^2-2y\cos\frac{5\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.\frac{5n\pi}{2m}\sin.\frac{5\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}.dy}{y^2-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}.$$

m impair.

6.me $$\frac{z^m dz}{1+z}=my^{n-1}dy+\frac{(-1)^n dy}{1+y}$$

$$+\cos.\frac{n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{\pi}{2m}.dy}{y^2-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.\frac{n\pi}{2m}\sin.\frac{\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\cos.\frac{3n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{3\pi}{2m}.dy}{y^2-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.\frac{3n\pi}{2m}\sin.\frac{3\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\cos.\frac{5n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{5\pi}{2m}.dy}{y^2-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.\frac{5n\pi}{2m}\sin.\frac{5\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}.dy}{y^2-2\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+1}-\frac{2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\sin.(m-2)\frac{\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

Dans ces équations les formules multipliées par les cos. sont évidemment des différentielles logarithmiques, & celles qui sont multipliées par les sinus appartiennent aux différentielles des arcs circulaires. Je me propose donc d'intégrer la formule générique $\frac{2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \sin. \frac{r\pi}{2m} .dy}{1 - 2y \cos. \frac{r\pi}{2m} + y^2}$, & à cet effet en supposant pour plus grande commodité $\frac{r\pi}{2m} = \varphi$ pour avoir la formule à intégrer $\frac{2 \sin n\varphi \sin. \varphi .dy}{1 - 2y \cos. \varphi + y^2}$, je fais

$y - 2 \cos. \varphi = u \sin. \varphi$, qui donne $dy = du \sin. \varphi$;

$y^2 - 2y \cos. \varphi + 1 = u^2 (\sin. \varphi)^2 + 1 - (\cos. \varphi)^2 = (\sin. \varphi)^2 (1 + u^2)$,

& conséquemment

$$\frac{2 \sin. n\varphi \sin \varphi . dy}{1 - 2y \cos. \varphi + y^2} = \frac{2 \sin. n\varphi (\sin. \varphi)^2 du .}{(\sin. \varphi)^2 (1 + u^2)} = 2 \sin. n\varphi \frac{du}{1 + u^2} .$$

D'où en intégrant, l'on aura

$$\int \frac{2 \sin n\varphi \sin \varphi . dy}{1 - 2y \cos. \varphi + y^2} = 2 \sin. n\varphi . \text{ arc. tang. } u$$

$$= 2 \sin. n\varphi . \text{ arc. tang. } \frac{y - \cos \varphi}{\sin. \varphi}$$

$$= 2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} . \text{ arc. tang. } \frac{y - \cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}}$$

17. Après tout ce que nous venons de dire, l'on voit de quelle manière l'on peut passer tout de suite à l'intégration des formules 5e, 6e. En distinguant donc les deux cas, l'on aura

m pair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z} = \frac{my^n}{n}$$

$$+\cos.\frac{n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+1)-2\sin.\frac{n\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{\pi}{2m}}{\sin.\frac{\pi}{2m}}$$

$$+\cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+1)-2\sin.\frac{3n\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{3\pi}{2m}}{\sin.\frac{3\pi}{2m}}$$

$$+\cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+1)-2\sin.\frac{5n\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{5\pi}{2m}}{\sin.\frac{5\pi}{2m}}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+1)$$

$$-2\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}}{\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m}}$$

$$+\text{const.}$$

m impair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z} = \frac{my^n}{n}+(-1)^n\log.(1+y)$$

$$+\cos.\frac{n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.\frac{\pi}{2m}+1)-2\sin.\frac{n\pi}{2m}\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{\pi}{2m}}{\sin.\frac{\pi}{2m}}$$

$$+\cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.\frac{3\pi}{2m}+1)-2\sin.\frac{3n\pi}{2m}\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{3\pi}{2m}}{\sin.\frac{3\pi}{2m}}$$

$$+\cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.(y^2-2y\cos.\frac{5\pi}{2m}+1)-2\sin.\frac{5n\pi}{2m}\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{5\pi}{2m}}{\sin.\frac{5\pi}{2m}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \cos.(m-2)\tfrac{n\pi}{2m} \log.(y^2 - 2y\cos.(m-2)\tfrac{\pi}{2m} + 1)$$

$$- 2\sin.(m-2)\tfrac{\pi}{2m} . \text{arc. tang.} \frac{y - \cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}}{\sin.(m-2)\frac{\pi}{2m}}$$

$$+ \text{const.}$$

18. Pour en venir à une hypothèse qui nous soit de quelqu'avantage, nous supposerons que $\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z}$ doive être pris de manière qu'en faisant $z=0$, le tout soit zéro, & qu'après l'intégration z devienne 1. Puisque nous avons fait $z = y^m$ ces conditions pour z seront les mêmes pour y. Or pour la première condition ayant fait $y=0$, le terme algébrique s'évanouit dans les deux intégrations, & tous les termes logarithmiques disparoissent, excepté ceux qui appartiennent aux arcs circulaires pour lesquels seuls la constante a lieu. En représentant donc l'arc générique avec la formule

$$2\sin.\tfrac{nr\pi}{2m} . \text{arc. tang.} \frac{y - \cos.\frac{r\pi}{2m}}{\sin.\frac{r\pi}{2m}}, \text{ ou bien}$$

$$2\sin.n\varphi . \text{arc. tang.} \frac{y - \cos.\varphi}{\sin.\varphi}$$

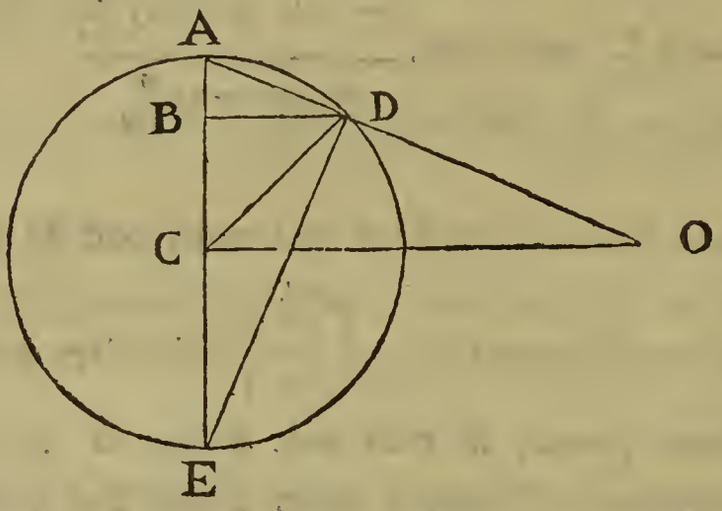
pour satisfaire à la première condition, l'on voit que la formule doit se changer dans cette autre

$$2\sin.n\varphi \left(\text{arc. tang.} \frac{y - \cos.\varphi}{\sin.\varphi} - \text{arc tang.} - \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}\right).$$

Maintenant j'admets la 2e condition de $y=1$, & en général il résulte l'intégrale

$2 \sin. n\varphi \left(\text{arc tang.} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin. \varphi} - \text{arc tang.} - \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi} \right)$

$= 2 \sin. n\varphi. \text{arc. tang.} \frac{\sin. \varphi}{1 - \cos. \varphi}$, par les théorèmes des tangentes.



Sur le rayon AC = 1 du cercle ADE, je prends CB = cos. φ, & le sinus BD = sin. ϕ, qui lui est normal. Je tire par A & D la corde AD, qui étant prolongée rencontre au point O la ligne CO perpendiculaire à AC. Enfin du centre C, & de l'extrémité du diamètre E je tire les droites CD, ED.

J'aurai AB : BD :: AC : CO, c'est-à-dire $1 - \cos. \varphi : \sin. \varphi :: 1 : CO = \frac{\sin. \varphi}{1 - \cos. \varphi}$. Mais CO est tangente de l'angle $CAO = ADE - AED = 90^{\circ} - \frac{ACD}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, en changeant les angles en arcs. Donc l'arc général $= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, & l'intégrale générale $= 2 \sin. n\varphi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = 2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{r\pi}{4m} \right)$

$= \frac{\pi}{2m} \sin. \frac{nr\pi}{2m} (m - r)$. Donnons à r les valeurs successives de 1, 3, 5 .... $\left[\frac{m-1}{m-2} \right.$, & en les employant pour les 2 intégrales du n.° 17, après avoir fait $y = 1$ nous aurons

m pair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}-1}dz}{1+z} = \frac{m}{n} + \cos.\frac{n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}(m-1)\sin.\frac{n\pi}{2m}$$
$$+ \cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{3\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}(m-3)\sin.\frac{3n\pi}{2m}$$
$$+ \cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{5\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}(m-5)\sin.\frac{5n\pi}{2m}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m})$$
$$- \frac{\pi}{2m}.1.\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}.$$

m impair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}-1}dz}{1+z} = \frac{m}{n} + (-1)^n\log.2 + \cos.\frac{n\pi}{2m}\,l.(2-2\cos.\frac{\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}(m-1)\sin.\frac{n\pi}{2m}$$
$$+ \cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{3\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}(m-3)\sin.\frac{3n\pi}{2m}$$
$$+ \cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{5\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}(m-5)\sin.\frac{5n\pi}{2m}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}) - \frac{\pi}{2m}2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}$$

Les derniers termes des rangs horizontaux forment les deux séries suivantes.

m pair.

$$1.^{e} - \frac{\pi}{2m}\Big((m-1)\sin.\frac{n\pi}{2m} + (m-3)\sin.\frac{3n\pi}{2m} + (m-5)\sin.\frac{5n\pi}{2m} \ldots.$$
$$+ (m-(2t-1))\sin.(2t-1)\frac{n\pi}{2m} + \ldots + 1.\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\Big).$$

m impair.

2.^{e} $-\frac{\pi}{2m}\left((m-1)\sin.\frac{n\pi}{2m}+(m-3)\sin.\frac{3n\pi}{2m}\right.$

$+(m-5)\sin.\frac{5n\pi}{2m}\ldots.+(m-(2t-1))\sin.(2t-1)\frac{n\pi}{2m}\ldots.$

$\left.+2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\right)$;

Où $(m-2t+1)\sin.(2t-1)\frac{n\pi}{2m}$ représente le terme général des deux séries; & $1.\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}$; $2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}$ en sont les derniers termes. Maintenant cherchons-en la somme en faisant abstraction du coefficient $-\frac{\pi}{2m}$.

19. Pour sommer ces séries du même terme général $(-2t+m+1)\sin.(2t-1)\frac{n\pi}{2m}$, ayant fait pour plus grande commodité $\frac{n\pi}{2m}=\theta$, je suppose que la somme est $(at+b)\sin.(2t+1)\theta+(ct+d)\cos.(2t+1)\theta+$ const. A la place de t je mets $t-1$, & il résulte $(at-a+b)\sin.(2t-1)\theta+(ct-c+d)\cos.(2t-1)\theta+$ const.; la différence de ces deux formules sera donc égale au terme général $(-2t+m+1)\sin.(2t-1)\theta$:

mais $\sin.(2t+1)\theta=\sin.(2t-1+2)\theta=\sin.(2t-1)\theta\cos.2\theta+\cos.(2t-1)\theta\sin.2\theta$;

& de plus $\cos.(2t+1)\theta=\cos.(2t-1+2)\theta$

$=\cos.(2t-1)\theta\cos.2\theta-\sin.(2t-1)\theta\sin.2\theta$. Donc en

substituant ces valeurs dans la première formule, & en retranchant ensuite la seconde, on aura cette équation

$$\begin{aligned}&\big((a\cos.2\theta - c\sin.2\theta - a)t + b\cos.2\theta - d\sin.2\theta + a - b\big)\sin.(2t-1)\theta\\ &+\big((a\sin.2\theta + c\cos.2\theta - c)t + b\sin.2\theta + d\cos.2\theta + c - d\big)\cos.(2t-1)\theta\end{aligned} = (-2t+m+1)\sin.(2t-1)\theta$$

De-là les 4 équations suivantes.

1^e $a\cos.2\theta - c\sin.2\theta - a = -2$

2^e $a\sin.2\theta + c\cos.2\theta - c = 0$

3^e $b\cos.2\theta - d\sin.2\theta + a - b = m+1$

4^e $b\sin.2\theta + d\cos.2\theta + c - d = 0.$

De la résolution des deux premières on tire

$a = 1$, $c = \frac{\sin.2\theta}{1-\cos.2\theta}$; & de celle des deux dernières

$$b = -\frac{m}{2} - \frac{1+\cos 2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}. \quad d = -\frac{(m-1)\sin 2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}.$$

Donc la somme cherchée sera

$$\left(t - \frac{m}{2} - \frac{1-\cos.2\theta}{2(1+\cos.2\theta)}\right)\sin.(2t+1)\theta$$

$$+\frac{\left(2t\sin 2\theta - (m-1)\sin 2\theta\right)\cos.(2t+1)\theta}{2(1-\cos.2\theta)} + \text{const.}$$

Ensuite nous déterminerons la constante par la condition qu'ayant fait $t = 1$, cette somme doit être $(m-1)\sin.\theta$, & nous aurons l'équation $\left(1 - \frac{m}{2} - \frac{1+\cos 2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}\right)\sin.3\theta$

$$+\frac{2\sin.2\theta - (m-1)\sin.2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}\cos.3\theta + \text{const.} = (m-1)\sin.\theta;$$

c'est pourquoi par les théorèmes trigonométriques nous obtiendrons const. $= \frac{m\sin\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{m}{2\sin\theta}$.

Cette somme va jusqu'au terme général ; mais comme dans nos deux suites les derniers termes ont pour coefficient 1 , 2 , on aura les sommes jusqu'à ces derniers termes en faisant $-2t+m+1=1$, $\&=2$, c'est-à-dire $2t=m$, $\&=m-1$; d'où en substituant m à $2t$ on obtiendra la somme pour le cas de

m pair

$$-\frac{1+\cos.2\theta}{2(1-\cos 2\theta)}\sin.(m+1)\theta+\frac{\sin.2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}\cos.(m+1)\theta+\frac{m}{2\sin.\theta}.$$

Nous remarquerons ici que $\sin.(m+1)\theta=\sin.m\theta\cos.\theta+\cos.m\theta\sin.\theta=\sin.\frac{n\pi}{2}\cos.\theta+\cos.\frac{n\pi}{2}\sin.\theta=\cos.\frac{n\pi}{2}\sin.\theta$, parce que quelque soit n, on a toujours $\sin.\frac{n\pi}{2}=0$. De même $\cos.(m+1)\theta=\cos.m\theta\cos.\theta-\sin.m\theta\sin.\theta=\cos.\frac{n\pi}{2}\cos.\theta-\sin.\frac{n\pi}{2}\sin.\theta=\cos.\frac{n\pi}{2}\cos.\theta$. Donc cette somme deviendra $=\cos.\frac{n\pi}{2}\frac{(-\sin\theta-\sin.\theta\cos 2\theta+\sin.2\theta\cos\theta)}{2(1-\cos.2\theta)}+\frac{m}{2\sin.\theta}$

$$=\cos.\frac{n\pi}{2}.\frac{-\sin\theta+\sin.\theta}{2(1-\cos.2\theta)}+\frac{m}{2\sin.\theta}=\frac{m}{2\sin\theta}=\frac{m}{2\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

Pour le cas de m impair à la place de $2t$ on doit mettre $m-1$, & la somme devient

m impair.

$-\frac{2+\cos 2\theta}{2(1-\cos 2\theta)}\sin.m\theta+\frac{m}{2\sin\theta}=\frac{m}{2\sin.\theta}=\frac{m}{2\sin.\frac{n\pi}{2m}}$, par la raison que $\sin.m\theta=\sin.\frac{n\pi}{2m}=0$. C'est pourquoi dans les deux

cas de m pair, & de m impair, la somme de chacune des deux séries n'est que $\frac{m}{2\sin.\frac{n\pi}{2m}}$, & en multipliant par le coefficient $-\frac{\pi}{2m}$, l'intégrale des termes appartenans aux sinus dans les séries du n.° 18 sera dans les deux cas $= -\frac{\pi}{4\sin.\frac{n\pi}{2m}}$.

20. Abrégeons encore davantage l'expression générale $\log.\left(2-2\cos.\frac{r\pi}{2m}\right)$. Puisque $1-\cos.\varphi = 2-2\left(\cos.\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 2\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2$, nous aurons $\log.(2-2\cos.\varphi) = \log.4\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 2\log.2\sin.\frac{\varphi}{2} = 2\log.2\sin.\frac{r\pi}{4m}$. Donc en donnant à r ses valeurs successives ordinaires & en substituant le tout dans les intégrations du n.° 18, l'on a

m pair

$$\int \frac{\zeta^{\frac{n}{m}}d\zeta}{1+\zeta} = \frac{m}{n} + 2\cos.\frac{n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{\pi}{4m}$$
$$+ 2\cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{3\pi}{4m} + 2\cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{5\pi}{4m}$$
$$+ \ldots + 2\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m} - \frac{\pi}{4\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

m impair

$$\int \frac{\zeta^{\frac{n}{m}}d\zeta}{1+\zeta} = \frac{m}{n} + (-1)^n\log.2 + 2\cos.\frac{n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{\pi}{4m}$$

$$+2\cos\tfrac{3n\pi}{2m}\log.2\sin.\tfrac{3\pi}{4m}+2\cos.\tfrac{5n\pi}{2m}\log.2\sin.\tfrac{5\pi}{4m}$$

$$+\ldots\ldots+2\cos.(m-2)\tfrac{n\pi}{2m}\log.2\sin.(m-2)\tfrac{\pi}{4m}-\frac{\pi}{4\sin\frac{n\pi}{2m}}.$$

ARTICLE II.

PROBLÈME ANALYTIQUE II.

Intégrer la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}$ *dans laquelle* m, n *sont des nombres entiers & rationnels.*

1. Je fais comme dans le problème 1er $z=y^m$, & j'ai la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=\frac{my^{m+n-1}dy}{1-y^m}=-my^{n-1}dy+\frac{my^{n-1}dy}{1-y^m}$. Je ne considère point les cas de n négatif & de $n>m$, parce que tout ce que nous avons dit sur ces hypothèses dans l'autre problème, est applicable à celui-ci, moyennant quelques changemens faciles ; & je me borne à l'intégration de la formule $\frac{my^{n-1}dy}{1-y^m}$ dans l'hypothèse de $m>n$.

Le nombre m peut être pair ou impair ; dans le cas de m pair, il est évident que le dénominateur $1-y^m$ contient deux facteurs linéaires $1+y$, $1-y$, & dans le cas de m impair, le facteur $1-y$ seulement. Les autres facteurs correspondans à m pair ou impair sont selon la théorie d'Euler des trinomes de la forme

$1-2y\cos.\frac{\pi}{m}+y^2$, dans lesquels π signifie la circon-

férence du rayon 1, r la série successive des nombres pairs, qui commence depuis 2, & se termine au nombre immédiatement plus petit que m; considérons la première hypothèse de

m pair.

2. Les facteurs linéaires de $1-y^m$ dans cette hypothèse étant deux; 1° $1+y$, 2° $1-y$, le partage de la fraction intégrale $\frac{my^{n-1}dy}{1-y^m}$, ou, en laissant à part dy, de la fraction $\frac{my^{n-1}}{1-y^m}$, se réduira à cette forme,

$$\frac{H}{1+y}+\frac{H'}{1-y}+\frac{A+By}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}+\frac{A'+B'y}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\frac{A'''+B'''y}{1-2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+y^2},$$

& tous ces diviseurs trinomes sont représentés par le trinome général $1-2y\cos.\frac{r\pi}{2m}+y^2$. A présent il nous faut chercher la valeur des constantes H, H', A, B, &c. Pour abréger je fais $\frac{r\pi}{2m}=\varphi$, & je nomme $\frac{my^{n-1}}{1-y^m}=\frac{P}{Q}$, & ensuite $Q=(1-2y\cos.\varphi+y^2)S$, d'où il résulte

$$\frac{P}{Q}=\frac{P}{(1-2y\cos\varphi+y^2)S}=\frac{A+By}{1-2y\cos\varphi+y^2}+\frac{R}{S},$$

P, Q, R, S étant nécessairement des fonctions rationnelles entières. Cela posé nous trouverons comme dans le problème précédent $R=\frac{P-S(A+By)}{1-2y\cos.\varphi+y^2}$ & conclurons que supposant

$1 - 2y\cos.\varphi + y^2 = 0$, c'est-à-dire $y = \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.\varphi$, moyennant la substitution de cette valeur de y dans $P - S(A + By)$, $P - S(A + By)$ deviendra $= 0$, de manière qu'en nommant $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\gamma \pm \delta\sqrt{-1}$ ce que deviennent P, S, si l'on y substitue la valeur de y, & qu'on répète les opérations du problème précédent, on parviendra enfin aux deux équations.

$$A = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\delta^2 + \gamma^2} + \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} \cdot \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2}\,; \quad B = \frac{-1}{\sin.\varphi} \cdot \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2}$$

Ainsi en raisonnant comme au n.° 11.; & en nommant $E \pm F\sqrt{-1}$ ce que devient $\frac{dQ}{dy}$ moyennant la substitution de la valeur ordinaire de y, l'on trouve $S = \frac{E \pm F\sqrt{-1}}{\pm 2\sqrt{-1}\sin.\varphi}$; & puisque dans la même hypothèse l'on a fait $S = \gamma \pm \delta\sqrt{-1}$, il nous résulte deux équations dont la résolution nous fournit $\delta = -\frac{E}{2\sin.\varphi}$; $\gamma = \frac{F}{2\sin.\varphi}$. Ces valeurs étant introduites dans celles de A, B, nous fournissent

$$A = \frac{-2\sin.\varphi\,(\beta E - \alpha F) - 2\cos.\varphi\,(\alpha E + \beta F)}{E^2 + F^2}\,; \quad B = \frac{2(\alpha E + \beta F)}{E^2 + F^2}$$

3. Nous avons ici, comme dans le premier problème, $P = my^{x-1}$; mais $Q = 1 - y^m$, & par conséquent $\frac{dQ}{dy} = -my^{m-1}$. Donc en mettant à la place de y sa valeur $\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.\varphi$, l'on aura

$$P = m(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.\varphi)^{n-1} = m(\cos.(n-1)\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.(n-1)\varphi);$$

$$\frac{dQ}{dy} = -m(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.\varphi)^{m-1}$$

$$= -m(\cos.(m-1)\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.(m-1)\varphi).$$

Donc $\alpha = m \cos.(n-1)\varphi$, $\beta = m \sin.(n-1)\varphi$,
$E = -m \cos.(m-1)\Phi$, $F = -m \sin.(m-1)\varphi$.
De-là $\frac{\beta E - \alpha F}{E^2 + F^2} = -\sin.(n-1)\varphi \cos.(m-1)\varphi + \sin.(m-1)\varphi \cos.(n-1)\varphi = \sin.(m-n)\varphi$; $\frac{\alpha E + \beta F}{E^2 + F^2} = -\cos.(m-1)\Phi \cos.(n-1)\varphi - \sin.(m-1)\varphi \sin.(n-1)\varphi = -\cos.(m-n)\Phi$. C'est pourquoi
$A = -2\sin.\varphi \sin.(m-n)\varphi + 2\cos.\varphi \cos.(m-n)\varphi = 2\cos.(m-n+1)\varphi$;
$B = -2\cos.(m-1)\varphi \cos.(n-1)\varphi - 2\sin.(m-1)\varphi \sin.(n-1)\Phi = -2\cos.(m-n)\Phi$,
& par conséquent la fraction du trinome général

$$\frac{2\cos.(m-n+1)\varphi - 2y\cos.(m-n)\varphi}{1-2y\cos.\varphi+y^2} = \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{r\pi}{2m} - 2y\cos.(m-n)\frac{r\pi}{2m}}{1-2y\cos.\frac{r\pi}{2m}+y^2},$$

où r doit prendre les valeurs paires.

4. Il nous reste à déterminer les deux numérateurs dans les fractions binomes $\frac{H}{1+y}$, $\frac{H'}{1-y}$, ce que l'on fait de la manière suivante. Puisque nous avons vu (n.° 13) que pour la fraction $\frac{m y^{n-1}}{(f+gy)S}$ on pouvoit se servir de l'équation $H = \frac{g P dy}{dQ}$, si en P & en $\frac{dQ}{dy}$ l'on fait $y = -\frac{f}{g}$, ayant $(f+gy)S = Q$, $Q = 1-y^m$, pour le cas de la première fraction $\frac{H}{1+y}$, le facteur $f+gy$ devient $1+y$,

qui donne $f=1$, $g=1$, $y=-1$, & $H=\frac{Pdy}{dQ}$.

Mais $dQ=-my^{m-1}dy$; $P=my^{n-1}$. Donc $H=-\frac{y^{n-1}}{y^{m-1}}$, lors qu'en H l'on met -1 à la place de y, qui rend $H=-\frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^{m-1}}=(-1)^{n-1}=-(-1)^n$, parce que, à cause de m pair, l'on a $(-1)^{m-1}=-1$. Pour le cas de la 2e fraction $\frac{H'}{1-y}$, l'on fait $f+gy=1-y$, c'est-à-dire $f=1$, $g=-1$, $y=1$; d'où $H'=-\frac{Pdy}{dQ}=\frac{-y^{n-1}}{-y^{m-1}}=1$, & enfin les deux fractions binomes $\frac{H}{1+y}+\frac{H'}{1-y}=-\frac{(-1)^n}{1+y}+\frac{1}{1-y}$.

5. Il sera donc facile de présenter dans ses fractions binomes, & trinomes la valeur de $\frac{my^{n-1}dy}{1-y^m}$, lorsque m est nombre pair, & par conséquent celle de $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}$, qui, en observant les conditions prescrites, sera la suivante :

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=-my^{n-1}dy-\frac{(-1)^n dy}{1+y}+\frac{dy}{1-y}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{2\pi}{2m}.dy-2\cos.(m-n)\frac{2\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{4\pi}{2m}.dy-2\cos.(m-n)\frac{4\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{6\pi}{2m}.dy-2\cos.(m-n)\frac{6\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{6\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{2\cos.(m-n+1)(m-2)\frac{\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)(m-2)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

6. Les opérations qui nous ont conduit aux derniers résultats dans le 1er cas de m pair pour la détermination des fractions trinomes, ne dépendent nullement, comme nous l'avons vu, de la supposition de m pair ou impair, & l'on doit seulement considérer que lorsque m est impair, la dernière de ces fractions sera exprimée par la formule

$$\frac{2\cos.(m-n+1)(m-1)\frac{\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)(m-1)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

Comme d'ailleurs nous n'avons pour ce cas d'autre facteur binome que celui que nous venons de désigner par $\frac{H'}{1-y}$; & que la détermination que nous avons donnée à H' dans le premier cas est elle-même indépendante de la supposition de m pair ou impair, nous pourrons aussi pour ce cas présenter d'abord la décomposition entière de la formule, & l'équation sera

m pair

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = -my^{n-1}dy + \frac{dy}{1-y}$$

$$+ \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{2\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{2\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}$$

$$+ \frac{2\cos.(m-n+1)\frac{4\pi}{2m}.dy - 2\cos.(m-n)\frac{4\pi}{2m}ydy}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)\frac{6\pi}{2m}.dy-2\cos.(m-n)\frac{6\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.\frac{6\pi}{2m}+y^2}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{2\cos.(m-n+1)(m-1)\frac{\pi}{2m}dy-2\cos.(m-n)(m-1)\frac{\pi}{2m}.ydy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

7. Ces résolutions pour les deux cas prendront une forme plus simple, si l'on fait réfléxion que généralement

$\cos.(m-n+1)\frac{r\pi}{2m}=\cos.\left(\frac{r\pi}{2}-(n-1)\frac{r\pi}{2m}\right)$

$=\cos.\frac{r\pi}{2}\cos.(n-1)\frac{r\pi}{2m}+\sin.\frac{r\pi}{2}\sin.(n-1)\frac{r\pi}{2m}$

$=\cos.(n-1)\frac{r\pi}{2m}$, par la raison que r devant être pair, $\sin.\frac{r\pi}{2}$ sera constamment $=0$ $\cos.\frac{r\pi}{2}=1$. Ainsi

$\cos.(m-n)\frac{r\pi}{2m}=\cos.\frac{r\pi}{2}\cos.\frac{nr\pi}{2m}+\sin.\frac{r\pi}{2}\sin.\frac{nr\pi}{2m}=\cos.\frac{nr\pi}{2m}$.

Mais $\cos.(n-1)\frac{r\pi}{2m}=\cos.\left(\frac{nr\pi}{2m}-\frac{r\pi}{2m}\right)=\cos.\frac{n'\pi}{2m}\cos.\frac{r\pi}{2m}$

$+\sin.\frac{n'\pi}{2m}\sin.\frac{r\pi}{2m}$. Donc si en faisant successivement $r=2, 4, 6$ &c., nous substituons cette valeur dans les formules des nombres 5, 6, & si nous disposons convenablement les termes de manière qu'elles se trouvent préparées pour l'intégration, nous aurons

m pair.

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=-my^{n-1}dy-\frac{(-1)^n dy}{1+y}+\frac{dy}{1-y}$$

$$-\cos.\frac{2n\pi}{2m}.\frac{2ydy-2\cos.\frac{2\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.\frac{2n\pi}{2m}\sin.\frac{2\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\cos.\frac{4n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{4\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.\frac{4n\pi}{2m}\sin.\frac{4\pi}{2m}dy}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\cos.\frac{6n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{6\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos\frac{6\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.\frac{6n\pi}{2m}\sin.\frac{6\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{6\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$-\cos.n(m-2)\frac{\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\sin(m-2)\frac{\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

m impair.

$$\frac{\zeta^{\frac{n}{m}}d\zeta}{1-\zeta}=-my^{n-1}dy+\frac{dy}{1-y}$$

$$-\cos.\frac{2n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{2\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.\frac{2n\pi}{2m}\sin.\frac{2\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\cos.\frac{4n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{4\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.\frac{4n\pi}{2m}\sin.\frac{4\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\cos.\frac{6n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.\frac{6\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{6\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.\frac{6n\pi}{2m}\sin.\frac{6\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.\frac{6\pi}{2m}+y^2}$$

$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$-\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\cdot\frac{2ydy-2\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}.dy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}+\frac{2\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m}dy}{1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2}$$

Les formules multipliées par les cos. sont évidemment différentielles logarithmiques, les autres s'intégrent par les arcs circulaires; & par l'intégrale de la formule générale, que nous avons trouvée au n.° 16,

$$\int \frac{2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \sin. \frac{r\pi}{2m} . dy}{1 - 2y \cos. \frac{r\pi}{2m} + y^2} = 2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} . \text{ arc. tang. } \frac{y - \cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}} .$$

Donc, venant enfin aux intégrations avec l'attention ordinaire de faire successivement $r = 2, 4, 6$ &c., & en ajoutant la constante l'on aura

m pair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1 - z} = - \frac{my^n}{n} - (-1)^n \log. (1+y) - \log. (1-y)$$

$$- \cos. \frac{2n\pi}{2m} \log. (1 - 2y \cos. \frac{2\pi}{2m} + y^2) + 2 \sin. \frac{2n\pi}{2m} \text{arc. tang. } \frac{y - \cos. \frac{2\pi}{2m}}{\sin. \frac{2\pi}{2m}}$$

$$- \cos. \frac{4n\pi}{2m} \log. (1 - 2y \cos. \frac{4\pi}{2m} + y^2) + 2 \sin. \frac{4n\pi}{2m} \text{arc. tang. } \frac{y - \cos. \frac{4\pi}{2m}}{\sin. \frac{4\pi}{2m}}$$

$$- \cos. \frac{6n\pi}{2m} \log. (1 - 2y \cos. \frac{6\pi}{2m} + y^2) + 2 \sin. \frac{6n\pi}{2m} \text{arc. tang. } \frac{y - \cos. \frac{6\pi}{2m}}{\sin. \frac{6\pi}{2m}}$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$- \cos. (m-2) \frac{n\pi}{2m} \log. (1 - 2y \cos. (m-2) \frac{\pi}{2m} + y^2)$$

$$+ 2 \sin. (m-2) \frac{\pi}{2m} . \text{arc. tang. } \frac{y - \cos. (m-2) \frac{\pi}{2m}}{\sin. (m-2) \frac{\pi}{2m}}$$

$$+ \text{ const.}$$

m impair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1-z} = -\frac{my^n}{n} - \log.(1-y)$$

$$-\cos.\frac{2n\pi}{2m}\log.(1-2y\cos.\frac{2\pi}{2m}+y^2)+2\sin.\frac{2n\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{2\pi}{2m}}{\sin.\frac{2\pi}{2m}}$$

$$-\cos.\frac{4n\pi}{2m}\log.(1-2y\cos.\frac{4\pi}{2m}+y^2)+2\sin.\frac{4n\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{4\pi}{2m}}{\sin.\frac{4\pi}{2m}}$$

$$-\cos.\frac{6n\pi}{2m}\log.(1-2y\cos.\frac{6\pi}{2m}+y^2)+2\sin.\frac{6n\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.\frac{6\pi}{2m}}{\sin.\frac{6\pi}{2m}}$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$-\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\log.(1-2y\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}+y^2)$$

$$+2\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m}.\text{arc.tang.}\frac{y-\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m}}{\sin.(m-1)\frac{\pi}{2m}}$$

$+$ const.

9. Nous embrasserons ici nouvellement l'hypothèse du n.° 18, que $\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1-z}$ doit être prise de manière, qu'elle disparoisse lorsque l'on a fait z ou $y=0$; & qu'après l'intégration l'on fasse $y=1$. Moyennant la première condition nous faisons évanouir toutes les intégrales qui précèdent les autres appartenantes aux arcs circulaires, pour lesquels seuls la constante a lieu. Or dans la formule générique

$$2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} . \text{arc. tang.} \frac{y - \cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}} \quad \text{en supposant } y = 0,$$

elle devient $2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} . \text{arc. tang.} \frac{-\cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}}$. Donc on aura

$$\text{const.} = -2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} . \text{arc. tang.} \frac{-\cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}},$$ & l'intégrale complète

$$2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \left(\text{arc. tang.} \frac{y - \cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}} - \text{arc. tang.} \frac{-\cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}} \right) .$$

Il nous reste à faire dans toutes les intégrales $y = 1$, & le changement dans les autres termes étant clair, pour ceux qui regardent les arcs nous aurons

$$2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \left(\text{arc. tang.} \frac{1 - \cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}} - \text{arc. tang.} \frac{-\cos. \frac{r\pi}{2m}}{\sin. \frac{r\pi}{2m}} \right)$$

$$= 2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \text{ arc. tang.} \frac{\sin. \frac{r\pi}{2m}}{1 - \cos. \frac{r\pi}{2m}} \quad \text{ou par le n.° 18,}$$

$$= 2 \sin. \frac{nr\pi}{2m} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{r\pi}{4m} \right) = \frac{\pi}{2m} (m - r) \sin. \frac{nr\pi}{2m} .$$

C'est pourquoi les valeurs paires successives étant données jusqu'à r, les dernières intégrales qui regardent les arcs, formeront ces deux suites.

m pair.

1.° $\frac{\pi}{2m}\left((m-2)\sin.\frac{2n\pi}{2m}+(m-4)\sin.\frac{4n\pi}{2m}+(m-6)\sin.\frac{6n\pi}{2m}+\ldots\right.$

$\left.+(m-2t)\sin.\frac{2tn\pi}{2m}+\ldots+2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\right)$.

m impair.

2.° $\frac{\pi}{2m}\left((m-2)\sin.\frac{2n\pi}{2m}+(m-4)\sin.\frac{4n\pi}{2m}\right.$

$+(m-6)\sin.\frac{6n\pi}{2m}+\ldots.+(m-2t)\sin.\frac{2tn\pi}{2m}+\ldots.$

$\left.+\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\right)$; dans lesquelles suites $(m-2t)\sin.\frac{2tn\pi}{2m}$ est le terme général, $2\sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}$, $\sin.(m-1)\frac{n\pi}{2m}$ le dernier.

10. Pour sommer ces suites, j'emploie la méthode du n.° 19, & je nomme $\sin.\frac{n\pi}{2m}=\sin.\theta$. Supposant la somme $(at+b)\sin.(2t+2)\theta+(ct+d)\cos.(2t+2)\theta+$ const. & raisonnant comme dans le n.° qu'on vient de citer, je parviendrai à l'équation

$$\begin{aligned}&\left((a\cos.2\theta-c\sin.2\theta-a)t+b\cos.2\theta-d\sin.2\theta+a-b\right)\sin.2t\theta\\&+\left((a\sin.2\theta+c\cos.2\theta-c)t+b\sin.2\theta+d\cos.2\theta+c-d\right)\cos.2t\theta\end{aligned}=(-2t+m)\sin.2t\theta$$

D'où les 4 équations

1.° $a\cos.2\theta-c\sin.2\theta-a=-2$

2.° $a\sin.2\theta+c\cos.2\theta-c=0$

3.° $b\cos.2\theta-d\sin.2\theta+a-b=m$

4.° $b\sin.2\theta+d\cos.2\theta+c-d=0$.

La comparaison de ces équations avec celles du n.° 19 nous fait voir qu'elles ne diffèrent que dans la 3e qui a le 2^{d} membre $=m+1$ dans celles-là, & $=m$ dans celles-ci. En substituant donc dans les valeurs de c, d du n.° 19 $m-1$ au lieu de m, nous aurons celles que nous cherchons.

Donc $a=1$, $c=\frac{\sin.2\theta}{1-\cos.2\theta}$, $b=-\frac{m}{2}-\frac{\cos.2\theta}{1-\cos.2\theta}$,

$d=-\frac{(m-2)\sin.2\theta}{2(1-\cos 2\theta)}$, & la somme cherchée sera

$$=\left(t-\frac{m}{2}-\frac{\cos 2\theta}{1-\cos.2\theta}\right)\sin.(2t+2)\theta$$

$$+\frac{\left(2t\sin.2\theta-(m-2)\sin 2\theta\right)\cos.(2t+2)\theta}{2(1-\cos.2\theta)}+\text{const.}$$

La constante est déterminée par la condition, qu'ayant fait $t=1$, la somme soit $=(m-2)\sin.2\theta$, d'où résulte l'équation $\text{const.}+\left(1-\frac{m}{2}-\frac{\cos 2\theta}{1-\cos.2\theta}\right)\sin.4\theta$

$+\frac{2\sin.2\theta-(m-2)\sin.2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}\cos.4\theta=(m-2)\sin.2\theta$, qui après les réductions trigonométriques nous donne

$$\text{const.}=\frac{m\sin 2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}=\frac{2m\sin.\theta\cos.\theta}{4(\sin.\theta)^2}=\frac{m\cos.\theta}{2\sin.\theta}=\frac{m}{2\tang.\theta}.$$

Maintenant à la place du terme général il faut mettre les derniers termes des deux séries appartenantes aux deux cas de m pair, & de m impair, pour en avoir la somme entière, & ces termes étant $2\sin.(m-2)\theta$; $1\sin.(m-1)\theta$, dans lesquels doit se changer le terme général $(m-2t)\sin.2t\theta$, nous aurons $m-2t=2$, 1, ou $2t=m-2$, $m-1$. Donc la somme de la série, pour

m pair

$$\left(\frac{m-2}{2} - \frac{m}{2} - \frac{\cos.2\theta}{1-\cos.2\theta}\right)\sin.m\theta$$

$$+\frac{(m-2)\sin 2\theta-(m-2)\sin.2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}\cos.m\theta + \frac{m}{2\,\text{tang.}\,\theta} = \frac{m}{2\,\text{tang.}\,\theta}$$

$$= \frac{m}{2\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}, \text{ parce que } \sin.m\theta = \sin.\frac{n\pi}{2} = 0, \text{ \& le second}$$

terme est aussi zéro.

Pour m impair on doit substituer le nombre $m-1$ à $2t$; d'où résulte $\left(\frac{m-1}{2} - \frac{m}{2} - \frac{\cos.2\theta}{1-\cos.2\theta}\right)\sin.(m+1)\theta$

$$+\frac{\sin 2\theta}{2(1-\cos.2\theta)}\cos.(m+1)\theta + \frac{m}{2\,\text{tang.}\,\theta}.$$

Mais $\sin.(m+1)\theta = \sin.m\theta\cos.\theta + \cos.m\theta\sin.\theta$

$= \sin.\frac{n\pi}{2}\cos.\theta + \cos.\frac{n\pi}{2}\sin.\theta = \cos.\frac{n\pi}{2}\sin.\theta,$

$\cos.(m+1)\theta = \cos.m\theta\cos.\theta - \sin.m\theta\sin.\theta = \cos.\frac{n\pi}{2}\cos.\theta$

$-\sin.\frac{n\pi}{2}\sin.\theta = \cos.\frac{n\pi}{2}\cos.\theta$. Donc par l'usage de ces valeurs, la somme devient, pour

m impair

$$\frac{(-1+\cos.2\theta)\sin\theta\cos.\frac{n\pi}{2}}{2(1-\cos.2\theta)} + \frac{2\sin.\theta(\cos.\theta)^2\cos.\frac{n\pi}{2}}{2(1-\cos 2\theta)} + \frac{m}{2\,\text{tang}\,\theta}$$

$$\frac{-2(\cos\theta)^2\sin\theta\cos.\frac{n\pi}{2}}{2(1-\cos.2\theta)} + \frac{2\sin.\theta(\cos\theta)^2\cos.\frac{n\pi}{2}}{2(1-\cos.2\theta)} + \frac{m}{2\text{tang.}\,\theta} = \frac{m}{2\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}},$$

11. Revenant aux intégrations du n.° 8 de cet article, nous ferons $y=1$ excepté dans le terme $-\log.(1-y)$ que nous écrirons $-\log.(1-z^{\frac{1}{m}})$ quoiqu'il soit réellement $-\log.(1-1)=\infty$, & substituerons $\frac{\pi}{2m}\cdot\frac{m}{2\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}$ aux séries des arcs; ainsi l'on aura

m pair

$$\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=-\frac{m}{n}-(-1)^n\log.2-\log.(1-z^{\frac{1}{m}})-\cos.\frac{2n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{2\pi}{2m})$$

$$-\cos.\frac{4n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{4\pi}{2m})-\cos.\frac{6n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{6\pi}{2m})$$

$$-\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

$$-\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m})+\frac{\pi}{4\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}.$$

m impair.

$$\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=-\frac{m}{n}-\log.(1-z^{\frac{1}{m}})-\cos.\frac{2n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{2\pi}{2m})$$

$$-\frac{4n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{4\pi}{2m})-\cos.\frac{6n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.\frac{6\pi}{2m})$$

$$-\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

$$-\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\log.(2-2\cos.(m-1)\frac{\pi}{2m})+\frac{\pi}{4\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}},$$

& comme généralement $1-\cos.\frac{r\pi}{2m}=2-2\left(\cos.\frac{r\pi}{4m}\right)^2$

$=2\left(\sin.\frac{r\pi}{4m}\right)^2$, qui donne $\log.\left(2-2\cos.\frac{r\pi}{2m}\right)=\log.4\left(\sin.\frac{r\pi}{4m}\right)^2$

$= 2 \log. 2 \sin. \frac{r\pi}{4m}$, le développement des valeurs de r fera prendre à ces intégrations cette dernière formule

m pair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1 - z} = -\frac{m}{n} - (-1)^n \log. 2 - \log. (1 - z^{\frac{1}{m}})$$
$$- 2 \cos. \frac{2n\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{2\pi}{4m} - 2 \cos. \frac{4n\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{4\pi}{4m}$$
$$- 2 \cos. \frac{6n\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{6\pi}{4m} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- 2 \cos. (m-2) \frac{n\pi}{2m} \log. 2 \sin. (m-2) \frac{\pi}{4m} + \frac{\pi}{4 \text{ tang. } \frac{n\pi}{2m}}.$$

m impair.

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1 - z} = -\frac{m}{n} - \log. (1 - z^{\frac{1}{m}}) - 2 \cos. \frac{2n\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{2\pi}{4m}$$
$$- 2 \cos. \frac{4n\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{4\pi}{4m} - 2 \cos. \frac{6n\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{6\pi}{4m} - \ldots\ldots$$
$$- 2 \cos. (m-1) \frac{2\pi}{2m} \log. 2 \sin. (m-1) \frac{\pi}{4m} + \frac{\pi}{4 \text{ tang. } \frac{n\pi}{2m}}.$$

Ces deux intégrales à cause du terme $- \log. (1 - z^{\frac{1}{m}})$ où l'on doit mettre $z = 1$, sont évidemment des quantités infinies.

12. Nous finirons cet article en faisant observer que nos intégrations de la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1 \pm z}$ ne peuvent servir 1° lorsque n est un multiple de m, ou lorsque n, m sont égaux; mais pour cette hypothèse n étant $= qm$ l'on changera la

formule proposée en cette autre $\frac{z^q dz}{1 \pm z}$ dont l'intégrale est déjà connue; 2.° lorsque pour la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1 \pm z}$ l'on a $m = 1$; mais se reduisant alors à $\frac{z^n dz}{1 \pm z}$ on en trouve l'intégrale comme dans l'hypothèse précédente; 3.° lorsque pour la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1 - z}$ l'on a $m = 2$, n étant impair; parce que s'il est pair, on revient aux cas précédens. Or si n est impair, en faisant $n = 2q - 1$, $z = y^2$, l'on a

$$\frac{z^{\frac{n}{2}} dz}{1 - z} = \frac{2y^{2q} dy}{1 - y^2} = -2y^{2q-2}dy - 2y^{2q-4}dy - 2y^{2q-6}dy$$

$$- \ldots - 2dy + \frac{2dy}{1 - y^2}, \text{ \& en intégrant}$$

$$\int \frac{z^{\frac{n}{2}} dz}{1 - z} = -\frac{2y^{2q-1}}{2q - 1} - \frac{2y^{2q-3}}{2q - 3} - \frac{2y^{2q-5}}{2q - 5} - \ldots$$

$$- 2y + \log.(1 + y) - \log.(1 - y) + \text{const.}$$

Par les conditions de nos intégrations la constante est zéro, & l'on doit faire $y = 1$. L'on aura donc en restituant le symbole n

$$\int \frac{z^{\frac{n}{2}} dz}{1 - z} = -\frac{2}{n} - \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-4} - \ldots$$

$$- 2 + \log. 2 - \log.(1 - z^{\frac{1}{2}}), \text{ qui à cause du dernier terme, où l'on doit mettre } z = 1, \text{ est une quantité infinie.}$$

ARTICLE III.

Usage des intégrales de la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1\pm z}$ *pour trouver la somme à l'infini des series harmoniques à termes rationnels.*

1. Je prends la formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z}$ & la développe en série qui me donne

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = z^{\frac{n}{m}}dz - z^{\frac{n}{m}+1}dz + z^{\frac{n}{m}+2}dz - z^{\frac{n}{m}+3}dz \text{ &c.}$$

Passant donc aux intégrations en sorte que l'intégrale disparoisse en faisant $z = 0$, j'ai

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{mz^{\frac{n}{m}+1}}{m+n} - \frac{mz^{\frac{n}{m}+2}}{2m+n} + \frac{mz^{\frac{n}{m}+3}}{3m+n} - \frac{mz^{\frac{n}{m}+4}}{4m+n} \text{ &c.}$$

Je fais $z = 1$, & en divisant l'équation par m, il résulte

$$\frac{1}{m}\int \frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n} \text{ &c.}$$

Le second membre est une série harmonique générale dont les signes des termes sont alternatifs. Ici reviennent les 2 hypothèses de $n > m$, $n < m$; si $n > m$, nous devons nous souvenir que (n. 7 artic. 1) nous avons vu que

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1+z} = my^{n-1}dy - my^{n-m-1}dy + my^{n-2m-1}dy - my^{n-3m-1}dy \ldots \pm my^{n-qm-1}dy \mp \frac{my^{n-qm-1}dy}{1+y^m}.$$

C'est pourquoi en intégrant &

en faisant après l'intégration $y = 1$, $n - qm = N$, l'on aura

$$\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z} = \frac{m}{n} - \frac{m}{n-m} + \frac{m}{n-2m} - \frac{m}{n-3m} \ldots \pm \frac{m}{N} \mp \int \frac{my^{N-1}dy}{1+y^m}.$$

Nous retombons ici dans les deux cas de m pair & de m impair. Lorsque le premier cas de m pair a lieu, en changeant n en N dans la 1e intégrale du n.° 20 de l'article 1^r, & en omettant le premier terme $\frac{m}{n}$, on aura l'intégrale de la formule $-\frac{my^{N-1}dy}{1+y^m}$. De même si le cas de m impair a lieu, la 2e intégrale qui y est désignée, en omettant le 1^r terme $\frac{m}{n}$, & changeant n en N, sera la même que $-\int \frac{my^{N-1}dy}{1+y^m}$. Donc en faisant usage de ces intégrales de la manière que nous avons dit, & en divisant le tout par m nous aurons

$n > m$, m pair.

$$\frac{1}{m}\int \frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n} \text{ &c.}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} \ldots \pm \frac{1}{N}$$

$$\pm \frac{1}{m}\left(2\cos\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{\pi}{4m} + 2\cos.\frac{3N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{3\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{5N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots\ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-1)\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) \mp \frac{\pi}{4m\sin.\frac{\pi}{2m}}.$$

$n > m$, m *impair.*

$$\frac{1}{m}\int \frac{\zeta^{\frac{n}{m}}\, d\zeta}{1+\zeta} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n} \text{ &c.}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} \quad . \quad . \quad . \quad \pm \frac{1}{N}$$

$$\pm \frac{1}{m}\left((-1)^N \log.2 + 2\cos.\frac{N\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{3N\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{3\pi}{4m} + 2\cos.\frac{5N\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-2)\frac{N\pi}{2m} \log.2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}\right) \mp \frac{\pi}{4m \sin.\frac{N\pi}{2m}}.$$

Dans la seconde hypothèse de $n < m$, les intégrales du n.° 20 divisées par m représenteront les sommes à l'infini des séries harmoniques dans les 2 cas de m pair , & de m impair , & l'on aura

$n < m$, m *pair.*

$$\frac{1}{m}\int \frac{\zeta^{\frac{n}{m}} d\zeta}{1+\zeta} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n} \text{ &c.}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left(2\cos.\frac{n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{\pi}{4m} + 2\cos.\frac{3n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{3\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{5n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\left. + 2\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m} \log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) - \frac{\pi}{4m\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

$n < m$, m *impair.*

$$\frac{1}{m}\int \frac{\zeta^{\frac{n}{m}} d\zeta}{1+\zeta} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n} \text{ &c.}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\left((-1)^n \log.2 + 2\cos.\frac{n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{\pi}{4m}\right.$$

$+ 2\cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{3\pi}{4m} + 2\cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots$

$+ 2\cos.(m-2)\frac{\pi}{2m}\log.2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}) - \frac{\pi}{4m\sin.\frac{n\pi}{2m}}$

2. Le célèbre Euler dans son introduction à l'analyse des infinis pag. 140 démontre la vérité de cette équation.

$$\frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{1}{m-n} + \frac{1}{2m-n} - \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{4m-n} \text{ \&c.} = \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2m\sin.\frac{n\pi}{2m}};$$

quelques soient m, n, qui peuvent aussi être des quantités irrationnelles. Cela posé, je fais

la 1e série $\frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \frac{1}{4m+n}$ &c. $= P$

la 2^e $\frac{1}{m-n} - \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} - \frac{1}{4m-n}$ &c. $= Q$

& j'ai d'abord l'équation $P - Q = \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2m\sin.\frac{n\pi}{2m}}$; & par conséquent $Q = P - \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2m\sin.\frac{n\pi}{2m}}$; & puisque P est connu, Q le deviendra aussi dans les différentes hypothèses de $n > m$, $n < m$, pour le cas de m pair, & de m impair, & ainsi nous aurons la valeur de la série harmonique à l'infini à signes alternatifs, lorsque n devient négatif. Voici les valeurs des séries Q selon les différentes hypothèses de m, n.

$n > m$, m pair

$$\frac{1}{m-n} - \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} - \frac{1}{4m-n} \text{ \&c.}$$

$$= -\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} + \ldots \pm \frac{1}{N}$$

$$\pm \frac{1}{m}\left(2\cos.\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{\pi}{4m} + 2\cos.\frac{3N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{3\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{5N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots \ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-1)\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) \pm \frac{\pi}{4m\sin.\frac{N\pi}{2m}} + \frac{\pi}{2m\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

$n > m$, m impair.

$$\frac{1}{m-n} - \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} - \frac{1}{4m-n} \text{ \&c.}$$

$$= -\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} + \ldots \pm \frac{1}{N}$$

$$\pm \frac{1}{m}\left((-1)^N\log.2 + 2\cos.\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{\pi}{4m}\right.$$

$$+2\cos.\frac{3N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{3\pi}{4m} + 2\cos.\frac{5N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots$$

$$\left. +2\cos.(m-2)\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}\right) \mp \frac{\pi}{4m\sin.\frac{N}{2m}} + \frac{\pi}{2m\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

$n < m$, m pair.

$$\frac{1}{m-n} - \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} - \frac{1}{4m-n} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{1}{m}\left(2\cos.\frac{n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{\pi}{4m} + 2\cos.\frac{3n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{3\pi}{4m}\right.$$

$$+2\cos.\frac{5n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m}\log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) + \frac{\pi}{4m\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

n < m , m impair.

$$\frac{1}{m-n} - \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} - \frac{1}{4m-n} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{1}{m}\left((-1)^n \log.2 + 2\cos.\frac{n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{\pi}{4m}\right.$$

$$+2\cos.\frac{3n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{3\pi}{4m} + 2\cos.\frac{5n\pi}{2m} \log.2\sin.\frac{5\pi}{4m} + \ldots.$$

$$\left. +2\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m} \log.2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}\right) + \frac{\pi}{4m\sin.\frac{n\pi}{2m}}.$$

3. Je viens à l'autre formule $\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}$ qui développée en série fournit l'équation

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = z^{\frac{n}{m}}dz + z^{\frac{n}{m}+1}dz + z^{\frac{n}{m}+2}dz + z^{\frac{n}{m}+3}dz + \text{\&c.}$$

De-là en intégrant avec la condition que le tout disparoisse lorsque $z = 0$, & posant ensuite $z = 1$, & divisant le tout par m, l'on a

$$\frac{1}{m}\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \text{\&c.}$$

c'est-à-dire que l'on a l'intégrale de cette formule égale à la série harmonique, prolongée à l'infini, de termes tous positifs. Des deux hypothèses de $n > m$, $n < m$ que l'on admette premièrement celle de $n > m$. Alors puisque

$$\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = \frac{my^{m+n-1}dy}{1-y^m} = -my^{n-1}dy - my^{n-2m-1}dy - my^{n-3m-1}dy$$

$$- \ldots. - my^{n-qm-1}dy + \frac{my^{n-qm-1}dy}{1-y^m}; \text{ où } qm \text{ est un tel multiple de } m \text{ que } n-qm \text{ devient le nombre immédiatement}$$

plus petit que m, si j'intègre avec la même condition, que je suppose ensuite $y=1$, $n-qm=N$, & que je divise par m, j'ai

$$\frac{1}{m}\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n-2m}-\frac{1}{n-3m}-\ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{N}+\int\frac{y^{N-1}dy}{1-y^m}, \text{ \& } N<m. \text{ Mais puisque}$$

$$\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=-\frac{my^n}{n}+\int\frac{my^{n-1}dy}{1-y^m}, \text{ en changeant } n \text{ en N, on au-}$$

roit de même $\int\frac{z^{\frac{N}{m}}dz}{1-z}=-\frac{my^N}{N}+\int\frac{my^{N-1}dy}{1-y^m}=-\frac{m}{N}+\int\frac{my^{N-1}dy}{1-y^m}$, lorsque dans le premier terme du 2^d membre l'on fait $y=1$. En retenant donc la détermination de $N<m$, le n.° 11 de l'article précédent nous donne la valeur de $\int\frac{z^{\frac{N}{m}}dz}{1-z}$ par le seul changement de n en N, c'est-à-dire la valeur de $-\frac{m}{N}+\int\frac{my^{N-1}dy}{1-y^m}$, ou, en divisant le tout par m, la valeur de $\frac{1}{N}+\int\frac{y^{N-1}dy}{1-y^m}$. C'est pourquoi en faisant cette substitution dans l'équation précédente l'on a, eu égard aux deux cas,

$n>m$, m pair.

$$\frac{1}{m}\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z}=\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}+\frac{1}{3m+n}+\frac{1}{4m+n}+\&c.$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n-2m}-\ldots\ldots-\frac{1}{N}-\frac{1}{m}\left((-1)^N\log.2\right.$$

$$+\log.(1-z^{\frac{1}{m}}) + 2\cos.\frac{2N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{2\pi}{4m} + 2\cos.\frac{4N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{4\pi}{4m}$$

$$+ 2\cos.\frac{6N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots$$

$$+ 2\cos.(m-2)\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}) + \frac{\pi}{4m\,\text{tang.}\frac{N\pi}{2m}}.$$

n > m , m impair.

$$\frac{1}{m}\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \&c.$$

$$= -\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} - \ldots$$

$$-\frac{1}{N} - \frac{1}{m}\left(\log.(1-z^{\frac{1}{m}}) + 2\cos.\frac{2N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{2\pi}{4m}\right.$$

$$+2\cos.\frac{4N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{4\pi}{4m} + 2\cos.\frac{6N\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{6\pi}{4m} + \ldots$$

$$\left.+2\cos.(m-1)\frac{N\pi}{2m}\log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) + \frac{\pi}{4m\,\text{tang.}\frac{N\pi}{2m}}.$$

Pour la seconde hypothèse de $n < m$, il est visible que le n.° 11 nous donne sans aucun changement la valeur des séries harmoniques qui appartiennent aux deux cas de m pair ou impair ; il n'y a qu'à diviser le tout par m. C'est pourquoi

n < m , m pair.

$$\frac{1}{m}\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \&c,$$

$$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\left((-1)^n\log.2 + \log.(1-z^{\frac{1}{m}})\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{2n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{2\pi}{2m} + 2\cos.\frac{4n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{4\pi}{4m}$$

$$+ 2\cos.\frac{6n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\log.2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m} + \frac{\pi}{4m\,\text{tang}\,\frac{n\pi}{2m}}.$$

n < m , m impair.

$$\frac{1}{m}\int\frac{z^{\frac{n}{m}}dz}{1-z} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \&c.$$

$$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\left(\log.(1-z^{\frac{1}{m}}) + 2\cos.\frac{2n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{2\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{4n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{4\pi}{4m} + 2\cos.\frac{6n\pi}{2m}\log.2\sin.\frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-1)\frac{2\pi}{2m}\log.2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) + \frac{\pi}{4m\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}.$$

4. Euler dans l'introduction à l'analyse des infinis démontre que l'équation suivante a lieu même lorsque m, n sont irrationnels.

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \&c.$$

$$- \frac{1}{m-n} - \frac{1}{2m-n} - \frac{1}{3m-n} - \frac{1}{4m-n} - \&c. = -\frac{1}{n} + \frac{\pi}{2m\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}.$$

Soit $\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \&c. = P$;

$\frac{1}{m-n} + \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n}$ &c. $= Q$; d'où il résulte

$$P - Q = -\frac{1}{n} + \frac{\pi}{2m\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}, \quad Q = P + \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2m\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}.$$

Donc, en introduisant la valeur connue de P, & en distinguant les deux hypothèses, & les deux cas, on aura

. . . . . .

$n < m$, m *pair.*

$$\frac{1}{m-n} + \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{4m-n} + \&c.$$

$$= -\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} - \ldots\ldots - \frac{1}{N}$$

$$- \frac{1}{n}\left((-1)^N \log. 2 + \log. (1 - z^{\frac{1}{m}}) \right.$$

$$+ 2\cos. \frac{2N\pi}{2m} \log. 2\sin. \frac{2\pi}{4m} + 2\cos. \frac{4N\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{4\pi}{4m}$$

$$+ 2\cos. \frac{6N\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\left. + 2\cos. (m-2)\frac{N\pi}{2m} \log. 2 \sin. (m-2)\frac{\pi}{4m} \right)$$

$$+ \frac{\pi}{4m \text{ tang. } \frac{N\pi}{2m}} - \frac{\pi}{2m \text{ tang. } \frac{n\pi}{2m}}.$$

$n > m$, m *impair.*

$$\frac{1}{m-n} + \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{4m-n} + \&c.$$

$$= -\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-2m} - \frac{1}{n-3m} - \ldots\ldots - \frac{1}{N} - \frac{1}{m}\left(\log. (1 - z^{\frac{1}{m}}) \right.$$

$$+ 2\cos. \frac{2N\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{2\pi}{4m} + 2\cos. \frac{4N\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{4\pi}{4m}$$

$$+ 2\cos. \frac{6N\pi}{2m} \log. 2 \sin. \frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2\cos. (m-1)\frac{N\pi}{2m} \log. 2 \sin. (m-1)\frac{\pi}{4m}\Big)$$

$$+ \frac{\pi}{4m \text{ tang. } \frac{N\pi}{2m}} - \frac{\pi}{2m \text{ tang. } \frac{n\pi}{2m}}.$$

$n < m$, *m pair.*

$$\frac{1}{m-n} + \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{4m-n} + \&c.$$

$$= -\frac{1}{m}\left((-1)^n \log. 2 + 2\cos.\frac{2n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{2\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{4n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{4\pi}{4m} + 2\cos.\frac{6n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m} \log. 2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}\right) - \frac{\pi}{4m\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}.$$

$n < m$, *m impair.*

$$\frac{1}{m-n} + \frac{1}{2m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{4m-n} + \&c.$$

$$= -\frac{1}{m}\left(\log.(1-\zeta^{\frac{1}{m}}) + 2\cos.\frac{2n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{2\pi}{4m}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{4n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{4\pi}{4m} + 2\cos.\frac{6n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{6\pi}{4m} + \ldots\ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-1)\frac{n\pi}{2m} \log. 2\sin.(m-1)\frac{\pi}{4m}\right) - \frac{\pi}{4m\,\text{tang.}\frac{n\pi}{2m}}.$$

C'est ainsi que toutes les combinaisons possibles des séries harmoniques sont épuisées ; & que leurs valeurs sont déterminées par une expression finie.

5. Les 8 séries harmoniques des n.° 1, 2 à signes alternatifs, & les 8 des n.° 3, 4 à signes tous positifs ont entr'elles cette différence remarquable que les valeurs des premières sont finies, & que celles des dernières sont infinies : il ne faut pas pourtant croire que les expressions de ces dernières soient tout-à-fait inutiles, parce que, quoiqu'en cher-

chant la valeur d'une série harmonique quelconque à signes positifs prise seule, on ne puisse rien conclure de nos formules, si non que sa valeur est infinie, on en pourra néanmoins inférer dans quelque cas une valeur finie, lorsque 2 séries harmoniques à signes uniformes étant données, il sera proposé de savoir la valeur de leur différence ; qu'on veuille connoître par exemple la valeur de la différence des deux séries

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \&c. = A$$

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{2p+q} + \frac{1}{3p+q} + \frac{1}{4p+q} + \&c. = B$$

supposé pour plus grande facilité $m > n$, $p > q$, m pair, p pair, en faisant usage de notre règle (n.° 3) nous trouverons

$$A - B = -\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\left((-1)^n \log. 2 + \log.\left(1 - z^{\frac{1}{m}}\right)\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{2n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{2\pi}{4m} + 2\cos.\frac{4n\pi}{2m} \log. 2\sin.\frac{4\pi}{2m} + \ldots$$

$$\left. + 2\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m} \log. 2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}\right) + \frac{\pi}{4m \text{ tang. } \frac{n\pi}{2m}}$$

$$+ \frac{1}{q} + \frac{1}{p}\left((-1)^q \log. 2 + \log.\left(1 - z^{\frac{1}{p}}\right) + 2\cos.\frac{2q\pi}{2p} \log. 2\sin.\frac{2\pi}{4p}\right.$$

$$+ 2\cos.\frac{4q\pi}{2p} \log. 2\sin.\frac{4\pi}{4p} + \ldots\ldots$$

$$\left. + 2\cos.(p-2)\frac{q\pi}{2p} \log. 2\sin.(p-2)\frac{\pi}{4p}\right) - \frac{\pi}{4p \text{ tang. } \frac{q\pi}{2p}}.$$

Or il n'y a d'infini dans cette équation que

$-\frac{1}{m} \log.\left(1 - z^{\frac{1}{m}}\right) + \frac{1}{p} \log.\left(1 - z^{\frac{1}{p}}\right)$, à cause que z doit être égal à 1, & ces deux termes se détruisent toutes les fois que $p = m$, quelles que soient les autres quantités n, q, dont

chacune dans notre exemple doit être plus petite que m. Ainsi avec cette détermination nécessaire de $p = m$ l'on obtient

$$A - B = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \&c.$$

$$- \frac{1}{m+q} - \frac{1}{2m+q} - \frac{1}{3m+q} - \&c.$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{m}\left(\left((-1)^q - (-1)^n\right)\log. 2\right.$$

$$+ \left(2\cos.\frac{2q\pi}{2m} - 2\cos.\frac{2n\pi}{2m}\right)\log. 2\sin.\frac{2\pi}{4m}$$

$$+ \left(2\cos.\frac{4q\pi}{2m} - 2\cos.\frac{4n\pi}{2m}\right)\log. 2\sin.\frac{4\pi}{4m} + \ldots.$$

$$\left. + \left(2\cos.(m-2)\frac{q\pi}{2m} - 2\cos.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\right)\log. 2\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}\right)$$

$$+ \frac{\pi}{4m \text{ tang. } \frac{n\pi}{2m}} - \frac{\pi}{4m \text{ tang } \frac{q\pi}{qm}},$$

qui est une expression dégagée des quantités infinies. Je n'apporte aucun exemple numérique, je ne considère point les séries harmoniques lorsque n est un multiple de m, ou que $m = 1$ dans le cas de m impair pour la série des signes alternatifs, ou que $m = 2$ dans le cas de m pair pour la série des signes uniformes, cas qui ne sont pas compris dans nos formules; parce qu'après la théorie que nous en avons donnée, il ne peut être difficile au Géomètre de les appliquer aux exemples numériques; & quant aux séries harmoniques qui dérivent des cas, qui échappent à nos formules, elles se trouvent d'une somme déjà connue. Nous ferons plutôt quelques réfléxions sur différentes choses répandues dans ce Mémoire, d'où, si l'on n'y prend garde, l'on pourroit tirer quelque conséquence précipitée.

6. Par exemple, comme l'on connoît la valeur de la série harmonique à signes alternatifs, en la multipliant par m, & supposant $\frac{m}{m+n} - \frac{m}{2m+n} + \frac{m}{3m+n} - \frac{m}{4m+n} + \&c. = M$, où M est fonction connue de m, d'après la marche d'Euler dans son calcul différentiel l'on pourroit se croire en droit de supposer m variable, & n constant; d'où passant aux différenciations, l'on pourroit regarder le résultat comme une bonne équation. Ainsi en faisant

$M' = \frac{dM}{dm}$; $M'' = \frac{d^2M}{(dm)^2}$, &c. l'on auroit par la première différenciation, & en divisant par dm,

$\frac{n}{(m+n)^2} - \frac{n}{(2m+n)^2} + \frac{n}{(3m+n)^2} - \&c. = M'$, & par-là l'on croiroit connoître la somme de la série réciproque des quarrés d'une suite arithmétique. Je multiplie par m^2, & j'obtiens $\frac{m^2 n}{(m+n)^2} - \frac{m^2 n}{(2m+n)^2} + \frac{m^2 n}{(3m+n)^2} - \&c. = m^2 M'$; & en différenciant, & en divisant par dm, l'on auroit

$\frac{2mn^2}{(m+n)^3} - \frac{2mn^2}{(2m+n)^3} + \frac{2mn^2}{(3m+n)^3} - \&c. = 2mM' + m^2 M''$

qui nous fourniroit la somme de la série réciproque des cubes de la susdite série. De même la série

$$\frac{2m^3 n^2}{(m+n)^3} - \frac{2m^3 n^2}{(2m+n)^3} + \frac{2m^3 n^2}{(3m+n)^3} - \&c.$$

étant différenciée feroit connoître la somme de la série réciproque des quarrés-quarrés &c., & le problème touchant ces sommes seroit complétement résolu, tandis que même dans la série des cubes la plus simple,

$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}$ &c., il a éludé tous les efforts du grand Euler, & des autres Géomètres les plus célèbres. Mais il n'est point permis dans le cas de nos séries de considérer m comme variable de manière à pouvoir pratiquer dans les termes qui la contiennent aucune différenciation pour en obtenir de vrais résultats; la raison en est que l'on ne différencie jamais aucune quantité qui ne doive nécessairement passer par toutes les valeurs possibles, le seul cas où les conséquences des différenciations soient très-certaines. Il est vrai que notre m peut prendre toutes les valeurs rationnelles entières, 1, 2, 3, 4, &c.; mais non pas le nombre infini de valeurs, qui peuvent s'y interposer; m va par sauts, & il est discontinu, & on ne sait quelle est l'intégrale de $\frac{z^{\frac{n}{m}} dz}{1+z}$ lorsque par ex. $m = \sqrt{2}$. Nos théorèmes ont donc lieu dans l'hypothèse de m entier, mais ils ne sont aucunement applicables au cas de toute valeur de m irrationnelle, transcendantale &c.; d'où il suit que les conséquences ci-dessus rapportées des différenciations sont très-fausses, & le problème des sommes en général pour les puissances réciproques des termes d'une série arithmétique demeure toujours irrésolu.

7. Par la même raison du manque de continuité dans notre symbole ce seroit aussi se méprendre que de croire pouvoir trouver la somme de la série réciproque des sinus, d'après notre équation du n.° 19 articl. 1 lorsque par ex. m est impair cette équation se change facilement en celle-ci

$$\frac{1}{\sin.\frac{n\pi}{2m}} = \frac{2}{m}\left((m-1)\sin.\frac{n\pi}{2m} + (m-3)\sin.\frac{3n\pi}{2m}\right.$$

$$\left. + (m-5)\sin.\frac{5n\pi}{2m} + \ldots + 1.\ \sin.(m-2)\frac{n\pi}{2m}\right)$$

& employant la méthode dont je me sers dans le n.° que je viens de citer, il ne sera point difficile de trouver

$$\int\frac{1}{\sin.\frac{n\pi}{2m}} = \frac{2(m-1)}{m}\cdot\frac{\sin.(n+1)\frac{\pi}{4m}\sin.\frac{n\pi}{4m}}{\sin.\frac{\pi}{4m}} + \frac{2(m-3)}{m}\cdot\frac{\sin.(n+1)\frac{3\pi}{4m}\sin.\frac{3n\pi}{4m}}{\sin.\frac{3\pi}{4m}}$$

$$+ \frac{2(m-5)}{m}\cdot\frac{\sin.(n+1)\frac{5\pi}{4m}\sin.\frac{5n\pi}{4m}}{\sin.\frac{5\pi}{4m}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{4}{m}\cdot\frac{\sin.(n+1)(m-2)\frac{\pi}{4m}\sin.(m-2)\frac{n\pi}{4m}}{\sin.(m-2)\frac{\pi}{4m}}.$$

Or cette équation est très-vraie, pourvu que n ne soit ni zéro, ni un multiple quelconque de m, & que de plus m ne soit pas plus petit que 3; car dans ces cas elle est également inutile que l'autre dont elle dépend: mais on peut l'appeler un théorème plus curieux qu'utile: 1.° parce que, si l'on prend tel nombre n de termes de la série réciproque qui passe la valeur de m, comme il s'y en trouve un qui est multiple de m, alors la somme est fausse, & elle n'est vraie que lorsque le nombre n est au-dessous de m. 2.° parce que lorsque m est partie rationnelle de la circonférence, comme le supposent mes formules, il y a une méthode très-courte pour connoître la valeur de la série réciproque des sinus jusqu'à n, & il suffit que les termes soient connus depuis $\frac{1}{\sin.\frac{\pi}{2m}}$ jusqu'à $\frac{1}{\sin.\pi}$,

terme n.^{me} en faisant $n = 2m$. Car la somme de ces termes est toujours zéro d'après la division exacte de la circonférence en parties égales, qui donne le même nombre de sinus égaux positifs & négatifs. Ainsi en commençant depuis $\frac{1}{\sin.(2m+1)\frac{\pi}{2m}}$ jusqu'à $\frac{1}{\sin.2\pi}$, ou depuis $\frac{1}{\sin.(4m+1)\frac{\pi}{2m}}$ jusqu'à $\frac{1}{\sin.3\pi}$ &c., ces parties successives de série ne sont que zéro, & $\frac{1}{\sin.(2m+1)\frac{\pi}{2m}}$ devient $= \frac{1}{\sin.\frac{\pi}{2m}}$, le terme suivant $\frac{1}{\sin.(2m+1)\frac{\pi}{2m}} = \frac{1}{\sin.\frac{2\pi}{2m}}$ &c. Après quoi l'on a de-rechef $\frac{1}{\sin.(4m+1)\frac{\pi}{2m}} = \frac{1}{\sin.\frac{\pi}{2m}}$; $\frac{1}{\sin.(4m+2)\frac{\pi}{2m}} = \frac{1}{\sin.\frac{2\pi}{2m}}$ &c., &c. C'est pourquoi, si par exemple, ayant fait $n = 102$, $m = 5$, l'on veut savoir quelle est la somme de la série réciproque

$$\frac{1}{\sin.\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin.\frac{2\pi}{10}} + \frac{1}{\sin.\frac{3\pi}{10}} + \ldots + \frac{2}{\sin.\frac{102\pi}{10}};$$

102 étant $= 10 + \frac{2}{10} = 0$, l'on pourra exprimer cette série de la manière suivante: $\frac{1}{\sin.\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin.\frac{2\pi}{10}} + \ldots$

$$+ \frac{1}{\sin.10\pi} + \frac{1}{\sin.\left(10\pi+\frac{\pi}{10}\right)} + \frac{1}{\sin.\left(10\pi+\frac{2\pi}{10}\right)}.$$

18.6.9.

Or, la partie de la série $\frac{1}{\sin.\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin.\frac{2\pi}{10}} + \ldots\ldots$,

$+\frac{1}{\sin 10\pi}$ étant $=0$, toute la série se réduira aux deux seuls derniers termes;

$$\frac{1}{\sin.\left(10\pi+\frac{\pi}{10}\right)} + \frac{1}{\sin.\left(10\pi+\frac{2\pi}{10}\right)} = \frac{1}{\sin.\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin.\frac{2\pi}{10}},$$

c'est-à-dire que les deux premiers termes de la série seront égaux à la somme de tous les termes jusqu'au dernier $\frac{1}{\sin.\frac{10\pi}{10}}$. 3° parce que lorsque les géomètres ont demandé la somme de la série réciproque des sinus, ils n'ont pas entendu la demander pour les sinus de ces arcs, qui sont parties rationnelles de la circonférence, mais pour des arcs quelconques; & c'est là le véritable problème difficile, dont malgré les efforts répétés des plus grands hommes nous n'avons pas encore de solution.

TURIN 1790.
CHEZ JEAN-MICHEL BRIOLO
IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES RR. ACADÉMIE DES SCIENCES
ET SOCIÉTÉ D'AGRICULTURE.
Avec permission.